

LYCÉE DE HÉDZRANAWOÉ	Devoirs Surveillés du 1 ^{er} semestre	Année scolaire : 2013-2014
BP : 30280 LOMÉ	Epreuve de Mathématiques	Classe : 2 ^{nde} S
Tel : 22 26 00 00		Durée : 3h

Exercice 1 (3,5 points)

A) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et x, y des nombres réels strictement positifs.

1) Démontrer :

(2 × 0,5 pt)

a) $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$

b) $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

2) Dédurre alors la relation : $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. (0,5 pt)

B) Soient x, y deux nombres réels.

1) Développer : $(y-x)(y^2+xy+x^2)$. (0,5 pt)

2) Vérifier : $y^2+xy+x^2 = \left(y+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2$. (0,5 pt)

3) Justifier que y^2+xy+x^2 est positif. (0,5 pt)

4) Dédurre alors : $x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$. (0,5 pt)

Exercice 2 (6,5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

(3 × 0,5 pts)

a) $|2x-3| < -2$

b) $|-x+5| \leq 2$

c) $E\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.

2) On donne $3,14 < \pi < 3,142$.

Encadrer avec le plus de précision possible, l'aire de la sphère de rayon R dans les cas suivants : (2 × 1 pts)

a) $7 < R < 7,3$

b) $R = 6 \pm 10^{-2}$.

(On rappelle que l'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère est donnée par $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.)

3) On considère l'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{R} / E\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\right\}$.

a) Déterminer l'ensemble A . (1 pt)

b) Dédurre (s'il existe) :

- l'ensemble des minorants de A
- le minimum de A
- le maximum de A .

Exercice 3 (8,5 points)

Soit ABC un triangle, et on désigne par K le milieu de $[AB]$.

1) Construire les points D, E, F et H vérifiant :

(4 × 0,5 pts)

$$\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BE} = \vec{0}, \quad 3\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} = 5\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{CH} = \vec{0}.$$

2) Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, les vecteurs :

(6 × 0,5 pts)

$$\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CK}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BK} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH}.$$

3) En utilisant les résultats précédents, prouver que :

a) les points D, E et F sont alignés. (1 pt)

b) les droites (CK) et (DE) sont parallèles. (1 pt)

c) le point E est milieu de $[BK]$. (1 pt)

d) le quadrilatère $ADFH$ est un parallélogramme. (0,5 pt)