

LYCEE DE ZEBEVI-ANEHO	Devoir de mathématiques du 2 ^e semestre	
Année scolaire 2013-14	Classe:1èreC4	Durée:4h

EXERCICE 1 (4pts)

A, B et C sont trois points non alignés et E le milieu du segment $[AC]$. Soit t un réel de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

1) Pour quelles valeurs de t le système $\{(A, \cos^2 t); (B, \sin^2 t); (C, \cos 2t)\}$ possède un barycentre? (0,5pt)

2) Lorsqu'il existe, le barycentre est noté G_t .

a) Démontrer que $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a $\overrightarrow{EG_t} = \frac{1}{2} \tan^2 t \overrightarrow{CB}$. (0,75pt)

b) En déduire le lieu géométrique de G_t lorsque t décrit $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. (0,25pt)

3) On suppose que ABC est un triangle rectangle en C tel que $CA = 4$ et $CB = 2$ et on note G le barycentre obtenu pour $t = \frac{\pi}{3}$.

a) Construire G . (0,5pt)

b) Démontrer que $GA^2 = GC^2$. (0,5pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que:
 $MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2 = 10$. (1,5pt)

EXERCICE 2 (4pts)

On se propose d'étudier l'existence et les propriétés de la suite (u_n) définie par

la donnée d'un réel u_0 et de la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}$.

1) a) Montrer que la suite u_n existe si et seulement si, $u_0 \in [-1; 1]$. (0,5pt)

b) Déterminer u_0 de sorte que la suite (u_n) soit constante. (0,5pt)

2) Dans la suite de l'énoncé, on posera $u_0 = \sin \alpha_0$, avec: $\alpha_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

a) Justifier ce choix. Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$? (0,75pt)

b) Etablir l'égalité, pour tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{2}} = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$. (0,5pt)

c) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\alpha_n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $u_n = \sin \alpha_n$. Quelle relation y a-t-il entre α_{n+1} et α_n ? (0,75pt)

d) On considère la suite (β_n) de terme général vérifiant: $\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$.

Montrer que cette suite est une suite géométrique. En déduire α_n puis u_n en fonction de n et α_0 . La suite (u_n) a-t-elle une limite? quelle est cette limite? (1pt)

PROBLEME (12pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x - 8} \end{aligned}$$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5pt)
- b) Déterminer trois réels a , b et c tels que $f(x) = a - \frac{b}{x+4} + \frac{c}{x-2}$ pour tout x de D_f . (0,75pt)
- c) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . (1,25pts)
- d) Préciser les asymptotes à la courbe représentative (C_f) de f . (0,5pt)
- 2) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f) . (0,5pt)
- 3) Calculer $f'(x)$. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f . (2pts)
- 4) A et B sont les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses. Déterminer les équations de la tangente en A et en B à la courbe (C_f) ainsi que les coordonnées du point d'intersection de ces deux tangentes. (1,5pts)
- 5) Tracer les deux tangentes, les asymptotes et la courbe C_f . (1,5pts)
- 6) a) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre et le signe des solutions de l'équation:

$$(E_m): x \in \mathbb{R}, (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 3 - 8m = 0.$$

Situer ces solutions par rapport à -1 et 5 . (1pt)

- b) En déduire le nombre de solutions de l'équation:

$$(E'_m): \theta \in]-\pi; \pi], f(\cos \theta) = m. (0,5pt)$$

7) On considère les fonctions g et h définies de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2 + 2|x| - 3}{x^2 + 2|x| - 8}$

$$\text{et } h(x) = \frac{5}{6x} - \frac{5}{6(x-6)}.$$

- a) Montrer que l'on peut obtenir les courbes (C_g) et (C_h) à partir de la courbe (C_f) . (1pt)
- b) Construire les courbes (C_g) et (C_h) dans le même repère que (C_f) . (1pt)