

COMPOSITION DU PREMIER SEMESTRE
EPREUVE DE MATHÉMATIQUE Tle S

Exercice 1 (5pts)

- I- Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$ où a, b, c appartiennent à $\mathbb{C}$.
- 1- Déterminer a, b, c sachant que $f(1) = -3+4i$; $f(i) = -4-3i$; $f(-i) = 10+5i$ (0,75pt)
 - 2- a, b, c ayant les valeurs trouvées à la question précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (0,75pt)
- II- Le plan complexe P est muni du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère le polynôme $P(z)$ défini par : $P(z) = z^3 + (3+3i)z^2 + (3+14i)z - 23 + 11i$ où $z \in \mathbb{C}$.
- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines dont les points images sont symétriques par rapport au point $I(-1; 0)$. (On appellera z_1 , z_2 et z_3 les solutions telles que $R_e(z_1) < R_e(z_2) < R_e(z_3)$). (2x1pt)
 - b) On désigne par A, B et C les images respectives de z_1 , z_2 et z_3 . Déterminer l'abscisse du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. (0,5pt)
 - c) Déterminer l'abscisse de l'isobarycentre G des points A, B, C . (0,5pt)
 - d) Faire une figure soignée comportant le parallélogramme, G et I . (0,5pt)

Exercice 2 (4pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et (C) sa courbe représentative

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de f . (0,5pt)
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D . (1pt)
- 3) Étudier les branches infinies. (0,5pt)
- 4) Étudier les variations puis dresser le tableau de variation de f . (1pt)
- 5) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes. (1pt)

Problème (11pts)

A- Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - 1 - \ln|x|$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

- 1)
 - a) Étudier la fonction f (pour calculer la limite de f en $+\infty$, on pourra mettre x en facteur) (3pts)
 - b) Montrer que la fonction f s'annule pour une valeur α distincte de 1 que l'on comparera aux nombres $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$. (2x0,5pt)
 - c) Soit (C) , la courbe de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm). Calculer les images par f des nombres suivants : $-e$; -1 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{e}$; $\frac{1}{2}$ puis tracer la courbe (C) . (1pt)
- 2) Soit f_1 la restriction de f à $]-\infty; 0[$
 - a) Montrer que f_1 admet une fonction réciproque f_1^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. (2x0,5pt)
 - b) Montrer que la fonction réciproque f_1^{-1} est dérivable en -2 et calculer sa dérivée en ce point. (1pt)

B- Soit $f(x) = x - 1 - \ln x$

Calculer la primitive de f qui prend la valeur 1 en e . (1pt)

C- Soit la fonction $h(x) = \sqrt{1+x}$ et a , un réel positif.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h . (0,5pt)
- 2) Calculer la dérivée h' de h . (2x0,5pt)
- 3)

- a) Vérifier que $\forall x \in [0; a]$; $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq h'(x) \leq \frac{1}{2}$ (0,5pt)
- b) En déduire que : $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$ (2x0,5pt)

BONNE COMPOSITION