

LYCÉE DE HEDZIRANAWOÉ	Composition du 2 ^e semestre	Année scolaire : 2012-2013
BP : 30280 LOMÉ	Epreuve de Mathématiques	Classe : 1 ^{ère} D
Tel : 22 26 00 00		Durée : 4h

Exercice 1 (5 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) respectivement définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} - a^2 u_{n+1} - 2(a-3)u_n = 0 \end{cases}$ et par $v_n = u_{n+1} - u_n$, où a est un nombre réel.

- 1) On prend $a = 2$.
 - a) Vérifier que la suite (v_n) est constante. (0,5 pt)
 - b) En déduire que (u_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera. (0,5 pt)
 - c) Exprimer en fonction de n , le terme u_n puis $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. (1 pt)
 - d) Déduire alors la valeur S de la somme des entiers naturels impairs inférieurs à 100. (0,5 pt)
- 2) Nous prenons maintenant $a = -4$.
 - a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera. (0,75 pt)
 - b) Exprimer v_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - c) Exprimer $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n . (0,5 pt)
 - d) Déduire l'expression de u_n en fonction de n . (0,75 pt)

(On pourra exprimer S'_n en fonction de u_n et u_0 .)

Exercice 2 (4,5 points)

On considère un triangle ABC et les milieux respectifs A', B', C' des segments $[BC], [CA], [AB]$, ainsi que l'isobarycentre G du triangle ABC . Soit N un point du plan distinct de A', B' et C' . On note I, J et K les symétriques respectifs de N par rapport à A', B' et C' .

- 1) Placer les points et les segments précédents sur une figure. (1 pt)
- 2) Démontrer qu'il existe une homothétie h_1 transformant ABC en $A'B'C'$. (0,75 pt)
(On précisera le centre et le rapport de h_1 .)
- 3) Déterminer l'homothétie h_2 transformant $A'B'C'$ en IJK . (0,75 pt)
- 4) Préciser la nature de $h_2 \circ h_1$. (1 pt)
- 5) Prouver que :
 - a) les segments $[AI], [BJ]$ et $[CK]$ ont le même milieu. (0,5 pt)
 - b) les points N, G et O sont alignés. (0,5 pt)

Problème (10,5 points)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D , et on note $(\mathcal{C}_m)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$x \mapsto \frac{x^2 + mx + m}{2x + 4}$$

- 1)
 - a) Déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $f_m(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x+4}$, pour $x \in D$. (0,5 pt)
 - b) Montrer que la droite $(\Delta_m) : y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_m)$. (0,5 pt)
 - c) Pour quelle valeur de m , la courbe $(\mathcal{C}_m)$ est-elle une droite? (0,5 pt)
 - d) Montrer que le point $\Omega_m \left(-2; \frac{m-4}{2} \right)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_m)$. (0,75 pt)
 - e) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un même point que l'on précisera. (0,75 pt)
- 2)
 - a) Discuter, suivant les valeurs de m , du nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C}_m)$ avec (Ox) . (0,75 pt)
 - b) Déterminer la fonction dérivée f'_m de f_m . (0,5 pt)
 - c) Déterminer l'ensemble (E) des valeurs de m pour lesquelles f_m n'admet pas d'extremum. (0,5 pt)
 - d) Déterminer les limites de f_m aux bornes de D . (1 pt)